Universidad Nacional de La Matanza

SISTEMAS DE ECUACIONES:MÉTODO DE DETERMINANTES

Apunte teórico

OTRO MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

MÉTODO DE DETERMINANTES O REGLA DE CRAMER

Para conocer este método debemos hablar previamente de ciertos conceptos matemáticos. Estos son: las matrices y los determinantes.

Matrices Reales: Una matriz real es un ordenamiento rectangular de números reales dispuestos en una determinada cantidad filas y columnas.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} & 5 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Fila 1} \\ \text{Fila 2} \\ \text{Fila 3} \end{array}$

Columna 1   Columna 2   Columna 3

En este caso la matriz A tiene 3 filas y tres columnas. Se dice entonces que A es una matriz de 3 por 3.

En símbolos: $A \epsilon R^{3\,x3}$ (Significa: A es una matriz de números reales formada por tres filas y tres columnas).

En nuestro ejemplo***, la matriz A es una matriz cuadrada debido a que la cantidad de filas es igual a la cantidad de columnas.***

Bajo ciertas condiciones 2 matrices se pueden sumar, restar o multiplicar.

También es posible multiplicar un número real por una matriz.

Las matrices son objetos del Álgebra que tiene aplicaciones en la economía, la ingeniería, química, ciencias naturales, etc.

Genéricamente a los elementos de una matriz se los designa como a_{ij} donde i indica el número de fila y j el número de columna ocupado por el elemento a

En nuestro ejemplo: $a_{11} = -1$; $a_{21} = \sqrt{2}$; $a_{23} = 5$; etc.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinante de una Matriz Cuadrada: el determinante de una matriz cuadrada (una matriz que tiene la misma cantidad de filas que de columnas) es un número que se obtiene al realizar ciertas operaciones predeterminadas con los elementos que la forman.

El determinante es una función que a una matriz cuadrada le asigna un número.

Si se trata de una matriz formada por un solo elemento (Una sola fila y una sola columna) el determinante de la matriz es igual a ese elemento.

Ejemplo: Para la matriz $A = [7]$ su determinante es: $Det(A) = |A| = 7$

Significa determinante de la matriz A

En general: Si $A = [a_{11}] \Longrightarrow |A| = a_{11}$

Para el caso de una matriz cuadrada formada por dos filas y dos columnas:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$

O sea que, para una matriz formada por dos filas y dos columnas, el valor del determinante de la misma se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} \end{bmatrix}$$

Y restando a este resultado el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \color{red}{a_{12}} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Hallar el valor del determinante de: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$$Det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 3.6 - (-2).1 = 18 + 2 = 20$$

Resolución de sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas mediante determinantes: (REGLA DE CRAMER)

Consideremos un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

$\begin{cases} 5.x - 3.y = 9 \\ 1.x + 2.y = 7 \end{cases}$ es decir, un sistema expresado bajo la forma: $\begin{cases} a.x + b.y = p \\ c.x + d.y = q \end{cases}$

Al determinante del sistema es:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En este determinante podemos observar que:

La primera columna está formada por los coeficientes de la incógnita ***x*** y la segunda por los de ***y***.

La primera fila está formada por los coeficientes de las incógnitas ***x*** e ***y*** que figuran en la primera ecuación.

La segunda fila está formada por los coeficientes de las incógnitas ***x*** e ***y*** que figuran en la segunda ecuación.

Si calculamos Δs:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.2 - 1.(-3) = 13$$

Si en el determinante del sistema cambiamos los coeficientes de la primera columna (coeficientes de la incógnita ***x***) por los números que están en el segundo miembro, tendremos un nuevo determinante al que llamaremos ***determinante de x***:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 9.2 - 7.(-3) = 39$$

Así también si en el determinante del sistema cambiamos los coeficientes de la segunda columna (coeficientes de la incógnita ***y***) por los números que están en el segundo miembro, tendremos otro determinante al que llamaremos ***determinante de y***:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 5.7 - 1.9 = 26$$

Regla de Cramer: Esta Regla debe su nombre a su creador Gabriel Cramer *

Sin entrar en detalles más complejos podemos decir que, si el determinante del sistema es distinto de cero, entonces el sistema de ecuaciones es compatible determinado. Existe una única solución para el mismo.

Y además para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se cumple que:

$$Si\ \Delta s \neq 0 \implies x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \ \wedge \ y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

En nuestro caso, vimos que: $\Delta s = 13 \implies \Delta s \neq 0$ por lo tanto nuestro sistema tiene solución única.

Además: $x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \Rightarrow x = \frac{39}{13} \Rightarrow x = 3$

Y por otro lado: $y = \frac{\Delta y}{\Delta s} \implies y = \frac{26}{13} \implies y = 2$

Por lo tanto el conjunto solución del sistema de ecuaciones es:

$$S = \{(3; 2)\}$$

GABRIEL CRAMER

Nació en Ginebra el 31 de julio 1704 y murió el 4 de enero, 1752, fue un matemático suizo. Profesor de matemáticas de la Universidad de Ginebra durante el periodo 1724-27. En 1750 ocupó la cátedra de filosofía en dicha universidad. En 1731 presentó ante la Academia de las Ciencias de París, una memoria sobre las múltiples causas de la inclinación de las órbitas de los planetas.


UNLaM
Coordinadores
Roxana Scorzo
Gabriela Ocampo
Liliana Romano
Carlos Urquiza
Ingreso


UNLaM
2018
NEXOS