CONSTRUCCIÓN DE FÓRMULAS DE FUNCIONES LINEALES

En este apartado aprenderemos a construir la fórmula de una función lineal, a partir de tener algunas características de ellas como datos.

Veremos, cómo armamos la ecuación explicita $y = m\,x + b$ de una función lineal de acuerdo a las condiciones que debe cumplir ella en cada caso.

Recordar que en $y = m\,x + b$ m es la pendiente b es la ordenada al origen

CASO 1- Teniendo como datos la pendiente y la ordenada al origen

Es el caso más sencillo, directamente en $y = m\,x + b$ reemplazamos "m" por el valor dado de la pendiente y "b" por el valor de la ordenada al origen.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la función lineal que tiene pendiente $\frac{4}{3}$ y ordenada al origen igual a -2,

$m = \frac{4}{3}$ b = -2 Reemplazando resulta: $y = \frac{4}{3}x - 2$.

Su gráfico es:

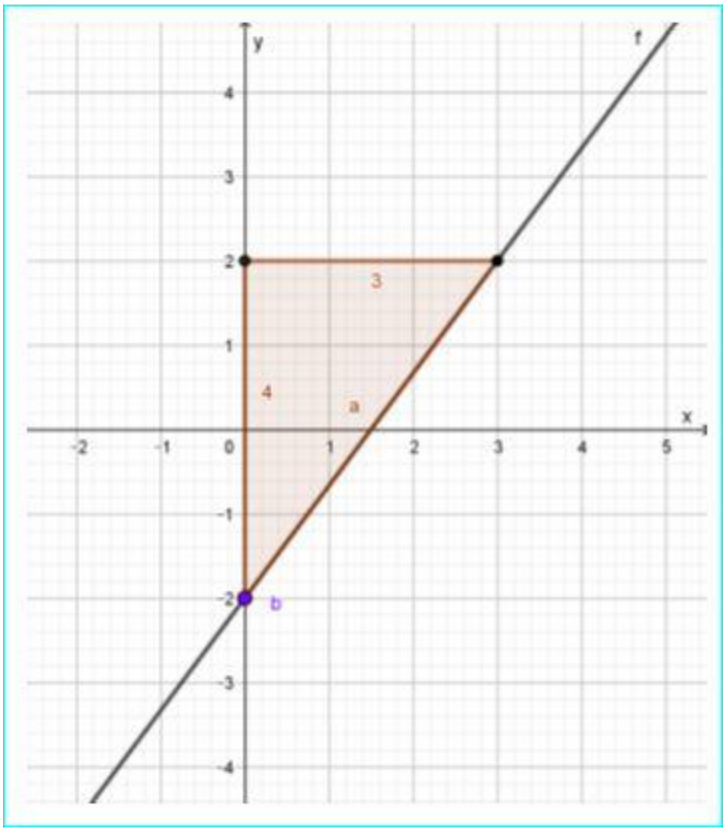

gráfico 1

Ver presentación PROBLEMA 1 – ARMADO DE FÓRMULAS- PROBLEMA DEL TANQUE

CASO 2- Teniendo como datos la pendiente y un punto que pertenece a la recta.

En este caso los datos son: la pendiente m y un punto A de coordenadas (x_1 ; y_1), un par ordenado.

Para este caso, existen dos formas de construir la ecuación explícita de la recta, que cumple esas condiciones, las analizaremos con distintos ejemplos.

Caso 2 – Primera forma

Empleando la fórmula explícita $y = m\,x + b$, reemplazamos los datos y obtenemos b, luego reconstruimos la ecuación.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la función lineal que tiene pendiente igual a $-\frac{3}{2}$ y contiene al punto de coordenadas (-4 ; 2) .

En la fórmula $y = m\,x + b$, reemplazamos m por el valor dado

(1) $y = -\frac{3}{2}\,x + b$ debemos encontrar el valor de "b" la ordenada al origen ,

Para ello reemplazamos el otro dato: el punto, sustituyendo "x" e "y" por las coordenadas dadas.

$2 = -\frac{3}{2} \cdot (-4) + b$ queda una ecuación de incógnita b,

La resolvemos $2 = 6 + b$

$2 - 6 = b$

$-4 = b$

Sustituimos este valor en (1) y tenemos la ecuación pedida $y = -\frac{3}{2}\,x - 4$

Verificación: es evidente que la ecuación de la función lineal obtenida tiene la pendiente pedida $-\frac{3}{2}$, comprobamos que efectivamente la recta pasa por (-4 ; 2) , reemplazando esos valores

$2 = -\frac{3}{2}\ .\ (\ -4\ ) - 4$, $\quad 2\ =\ 6 - 4$, $\quad 2\ =\ 2$ nos queda una identidad, entonces el punto dado verifica la ecuación.

Al graficar la recta de ecuación $y = -\frac{3}{2}\ x - 4$ observamos que el punto (- 4 ; 2) pertenece a la recta.

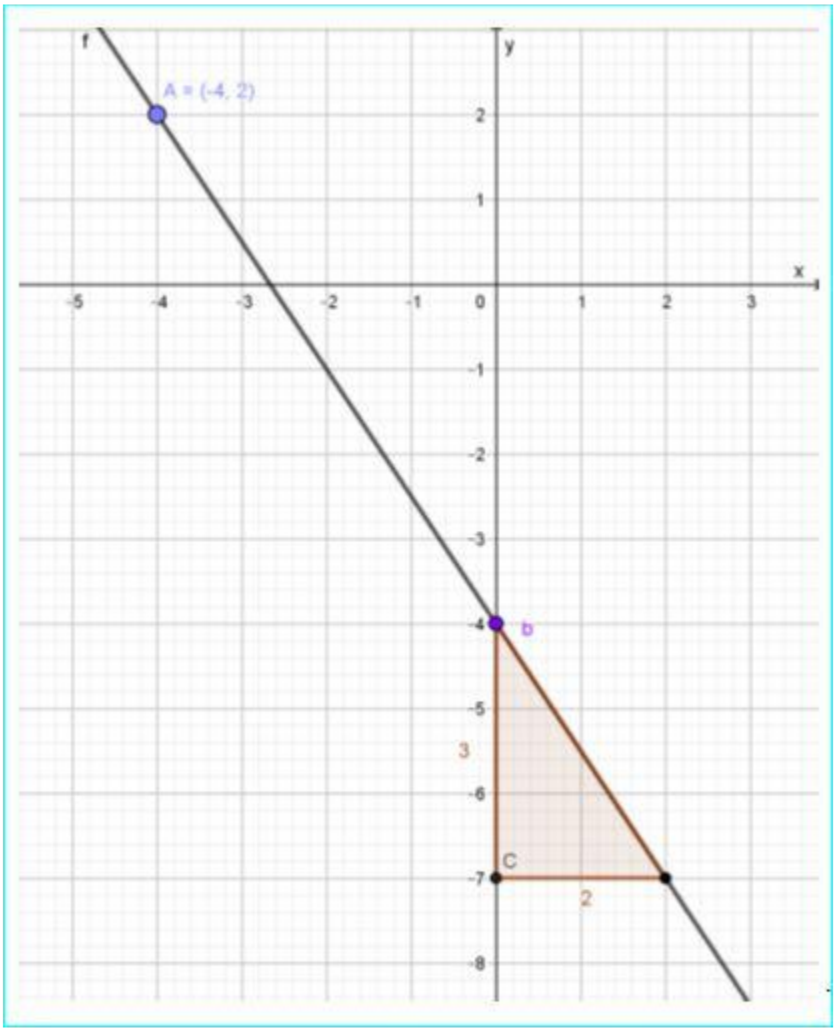

gráfico 2

En síntesis, en esta primera forma, reemplazamos los datos de la pendiente y el punto en la ecuación y = m x + b , despejamos b y rearmamos la fórmula.

Caso 2 – Segunda forma

Empleando la ecuación del haz de rectas $y - y_1 = m\ (x - x_1)$

Esta ecuación nos brinda el conjunto de todas las rectas que pasan por el punto de coordenadas A= $(x_1; y_1)$ y difieren en el valor de la pendiente "m" que tienen .

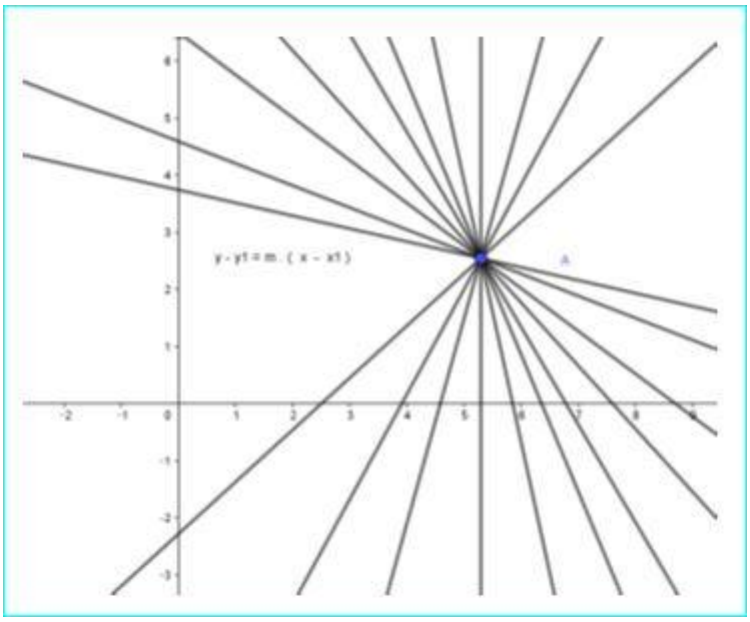

gráfico 3

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la función lineal que tiene pendiente igual a 3 y pasa por el punto de coordenadas (- 2 ; 1/ 2) .

Los datos nos dicen que : m = 3 y el punto A = $\left(x_1; y_1\right)$ = (- 2 ; 1/ 2) x_1 = -2 , y_1 = 1/2 .

Reemplazamos en la ecuación del haz de rectas $y - y_1 = m\ \left(x - x_1\right)$ resulta $y - \frac{1}{2} = 3\ \left(x - \left(-2\right)\right)$ operamos con esta fórmula hasta llegar a la forma explícita y = mx+b

$y - \frac{1}{2} = 3\ (\ x + 2\ )$ propiedad distributiva

$y - \frac{1}{2} = 3\ x + 6$ despejamos “y”

$y = 3\ x + 6 + \frac{1}{2}$ sumamos

$y = 3\ x + \frac{13}{2}$ obtenemos la forma explícita.

Verificación: es evidente que la ecuación de la función lineal obtenida tiene la pendiente pedida 3 (el número que multiplica a “x” es 3), comprobamos que efectivamente la recta pasa por

$(-2 ; \frac{1}{2})$, reemplazando esos valores

$\frac{1}{2} = 3 . (-2) + \frac{13}{2}$, $\frac{1}{2} = -6 + \frac{13}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ vemos que el punto dado cumple la ecuación.

Al graficar la recta de ecuación $y = 3x + \frac{13}{2} = 3x + 6{,}5$ observamos también que el punto pedido $(-2 ; \frac{1}{2})$ pertenece a la recta.

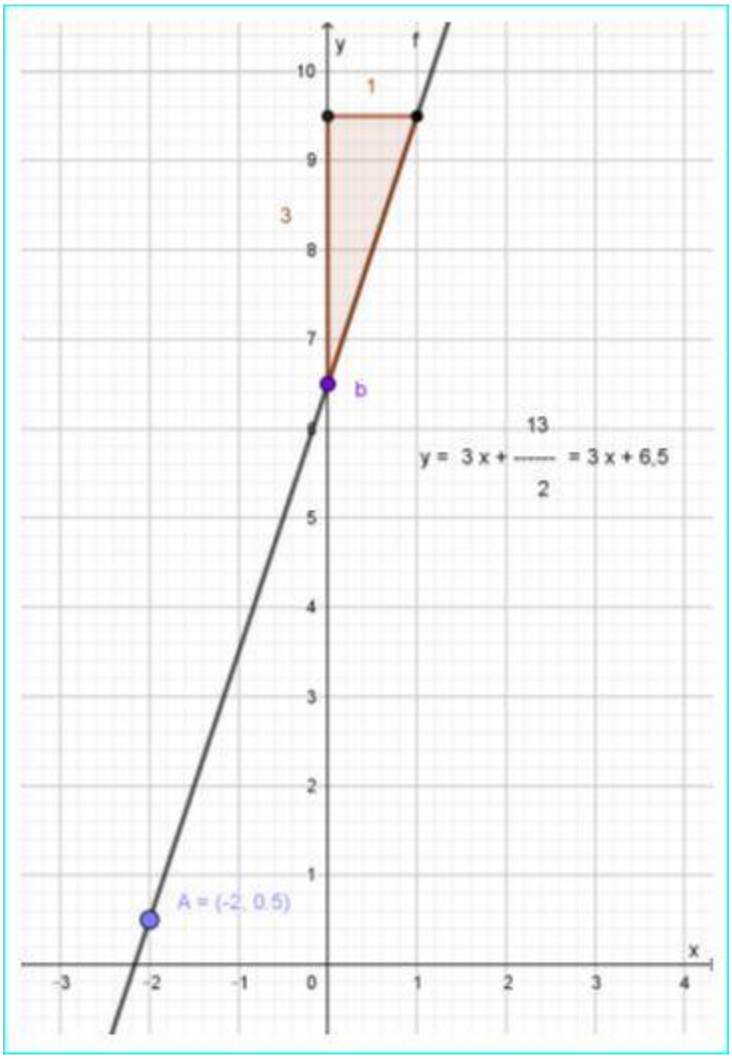

gráfico 4

Ver presentación PROBLEMA 2 – ARMADO DE FÓRMULAS - PROBLEMA DE LA TEMPERATURA

CASO 3 - Teniendo como datos, dos puntos que pertenecen a la recta.

En este caso, los datos son los coordenadas de dos puntos , los llamaremos

$P = (x_1 ; y_1)$ y $Q = (x_2 ; y_2)$

Caso 3 – Primera forma

Usando la fórmula explicita y = mx + b y resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de 2 x 2 (2 ecuaciones con dos incógnitas) .

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la función lineal que contiene los P= (2 ; 3) y Q = (6 ; -3).

Como los puntos deben pertenecer a la recta que representa a la función lineal pedida, comenzamos reemplazando sus coordenadas en “x” e “y” de la ecuación y = m x + b

P = (2 ; 3)   3 = m . 2 + b

Q = (6 ; -3)   - 3 = m . 6 + b

Resulta un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, “m” y “b”.

Lo resolvemos por cualquiera de los métodos conocidos: sustitución, igualación, reducción por sumas o restas u otros.

En este caso lo haremos por reducción por resta.

Al restar miembro a miembro las dos ecuaciones, obtenemos: 3 – (-3) = 2 m – 6 m ya que las “b” se cancelan.

Despejamos la incógnita m :   6 = - 4 m   6 / (- 4) = m $-\frac{3}{2} = m$

Reemplazamos el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema:

En la primera $3 = -\frac{3}{2} . 2 + b$ y despejamos b

3 = - 3 + b   3 + 3 = b   6 = b

Reemplazando los valores de m y b obtenidos, en y = m x + b resulta

$y = -\frac{3}{2}x + 6$ que es la ecuación de la función lineal pedida.

Verificamos que los dos puntos cumplen la ecuación

P = (2 ; 3)   3 = - 3 / 2 . 2 + 6   3 = - 3 + 6   3 = 3 cumple

Q = (6 ; -3)   - 3 = - 3 / 2 . 6 + 6   - 3 = - 9 + 6   - 3 = -3 cumple.

Al graficar la recta de ecuación $y=-\frac{3}{2}x+6$ observamos que los puntos pedidos P = (2 ; 3) y Q = (6 ; -3) pertenecen a la recta.

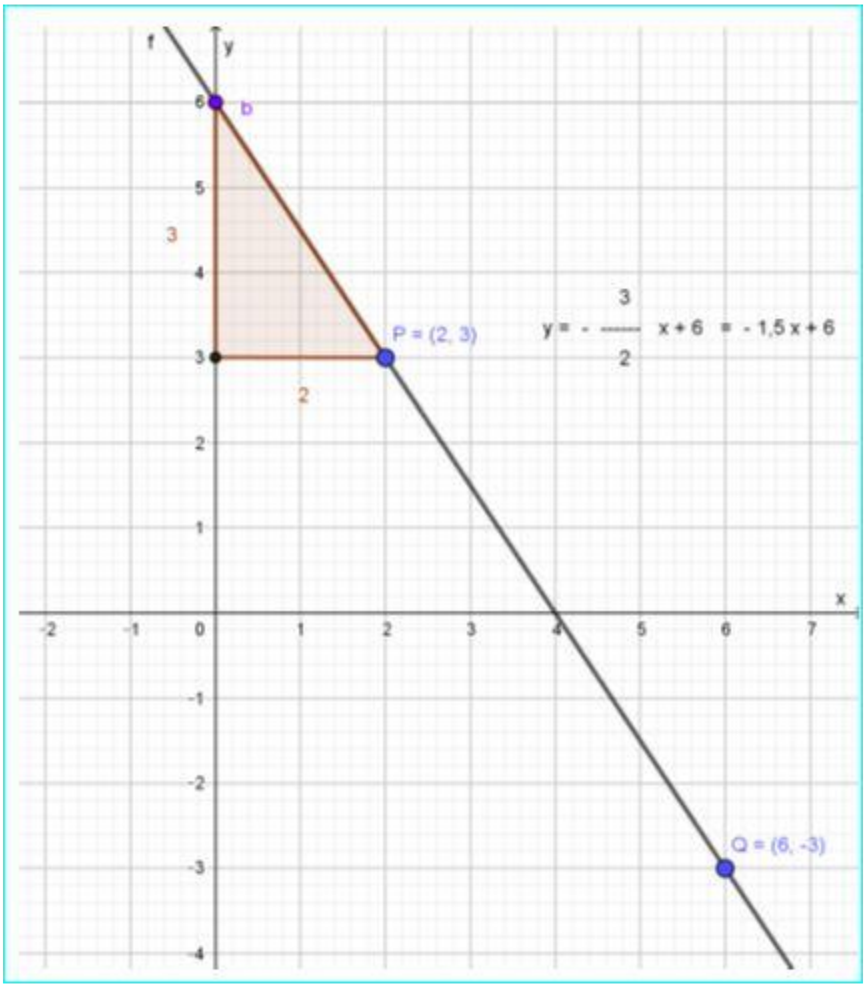

gráfico 5

Caso 3 – Segunda forma

Calculando el valor de la pendiente de la recta que determinan los dos puntos y luego con esa pendiente y uno de los puntos dados usamos alguna de las formas vistas para el Caso 2.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la función lineal que contiene a los puntos T= (- 4 ; 1) y R = (2 ; 4).

Recordemos que la pendiente o razón de cambio es $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Reemplazando los puntos dados , considerando: T = (- 4 ; 1) = (x_1 ; y_1) , R = (2 ; 4) =(x_2 ; y_2)

$$m=\frac{4-1}{2-(-4)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ahora, tenemos la pendiente de la recta y un punto que pertenece a ella (cualquiera de los dos puntos dados), así que estamos en las condiciones del Caso 2 (la pendiente y un punto), empleamos cualquiera de las dos formas vistas del caso 2 para armar la ecuación.

Lo haremos ahora con la segunda forma: Empleando la ecuación del haz de rectas

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

Reemplazamos m y las coordenadas del punto T= (- 4 ; 1) (Lo mismo se obtiene si se usa el punto R)

$y - 1 = \frac{1}{2} . (x - (-4))$ operando resulta

$y - 1 = \frac{1}{2}\ (x + 4)$ $\qquad$ $y - 1 = \frac{1}{2}\ x + 2$

$y = \frac{1}{2}\ x + 2 + 1$ $\qquad$ entonces, $y = \frac{1}{2} x + 3$

Podemos verificar, comprobando que el punto que no usamos para armar la ecuación del haz de rectas, pertenece a la función lineal obtenida

R = (2 ; 4). reemplazamos en $y = \frac{1}{2}\ x + 3$, $4 = \frac{1}{2}\ 2 + 3$, $4 = 1 + 3$, $4 = 4$ cumple

Al graficar la recta de ecuación $y = \frac{1}{2} x + 3$ observamos que los puntos pedidos T= (- 4 ; 1) y R = (2 ; 4). pertenecen a la recta

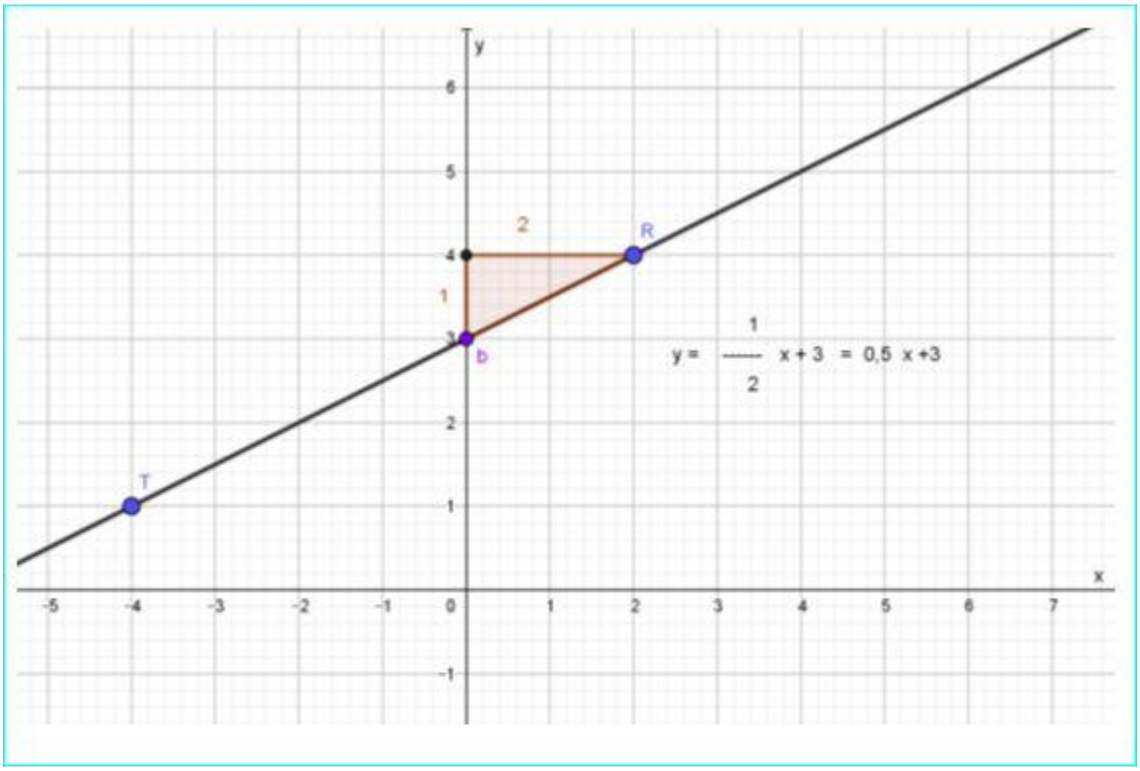

gráfico 6

Ahora pueden verificar que se llega a la misma ecuación, si en lugar de usar el punto T , usamos el punto R .

Caso 3 – Tercera forma

Empleando la ecuación de la recta dados dos puntos, con la fórmula $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

A esta otra fórmula puede arribarse fácilmente, si en la ecuación del haz de rectas
$y - y_1 = m . (x - x_1)$

Sustituimos la pendiente "m " por su valor $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.(x-x_1)$$

Dividiendo por $y_2 - y_1$ llegamos a la fórmula dada anteriormente que es más fácil de recordar

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la función lineal que contiene a los puntos A= (- 2 ; - 3) y B = (1 ; 3).

Consideraremos A = (- 2 ; - 3) = (x_1 ; y_1) y B = (1 ; 3) = (x_2 ; y_2)

Y reemplazamos en la fórmula $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

Resulta : $\frac{y-(-3)}{3-(-3)}=\frac{x-(-2)}{1-(-2)}$, $\frac{y+3}{6}=\frac{x+2}{3}$

Multiplicamos por 6 $y+3=6.\frac{x+2}{3}$

y simplificamos $y+3=2.(x+2)$

Distribuimos el 2 $y+3=2.x+4$

Y restamos 3 $y=2.x+4-3$

Resultando : $y=2.x+1$ la ecuación de la función lineal pedida.

Verificamos que los dos puntos cumplen la ecuación

A= (- 2 ; - 3) - 3 = 2 .(- 2) +1 - 3 = - 4 + 1 - 3 = -3 cumple

B = (1 ; 3) 3 = 2 . 1 + 1 3 = 2 + 1 3 = 3 cumple.

Ver presentación PROBLEMA 3 – ARMADO DE FÓRMULAS – PROBLEMA DEL ESTACIONAMIENTO