# Breve historia de los Números Complejos

> Teniendo conocimiento de cómo la raza humana ha adquirido su sabiduría sobre ciertos hechos y conceptos, estaremos en mejor disposición de juzgar como los niños adquieren tal conocimiento. George Pólya (1887-1985)

## Primeras referencias:

La primera referencia escrita de la raíz cuadrada de un número negativo la encontramos en la obra "Stereometría" de Herón de Alejandría (Grecia aprox. 10-75) alrededor de la mitad del siglo I. La siguiente referencia sobre esta cuestión se data en el año 275 en la obra de Diophantus (aprox. 200-284) Arithmetica. En su intento de cálculo de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7, Diophantus planteó resolver la ecuación $336 x^2 + 24 = 172 x$, ecuación de raíces complejas como puede ser comprobado fácilmente.

Son los matemáticos hindúes los que dan las primeras explicaciones a este tipo de problemas. Mahavira, alrededor del año 850, comenta en su tratado de los números negativos que "como en la naturaleza de las cosas una cantidad negativa no es un cuadrado, por tanto no puede tener raíz cuadrada". Alrededor de 1150 es Bhaskara quien lo describe de la siguiente forma:

"El cuadrado de un número, positivo o negativo, es positivo; la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; no existe raíz cuadrada de un número negativo ya que un número negativo no es un cuadrado.

## Primeros estudios:

Jerome Cardan (Italia, 1501-1576), un matemático, físico y filósofo italiano.

En 1545 publica "Ars Magna" (El Gran Arte) en el cual describe un método para resolver ecuaciones algebraicas de grado tres y cuatro. Esta obra se convertía así en el mayor tratado de álgebra desde los Babilónicos, 3000 años antes, que dedujeron cómo resolver la ecuación cuadrática.

Un problema planteado por Cardan en su trabajo es el siguiente:

Si alguien te pide dividir 10 en dos partes cuyos producto sea 40, es evidente que esta cuestión es imposible en el campo de los números reales.

Cardan aplicaba entonces su algoritmo al sistema de ecuaciones $x + y = 10$, $x \cdot y = 40$ dando como soluciones $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$. Por multiplicación probaba Cardan que el producto era 40. Esta es la primera constancia escrita de la raíz de un número negativo y de su manejo algebraico.

Cardan también tropieza con estas raíces en las soluciones que presenta de la ecuación cúbica

$x^3 = a.x + b$ . Tales soluciones vienen dadas por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Para la ecuación $x^3 = 15x+4$ esta fórmula da como solución $x = \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{-121}}$ la cual Cardan dió por válida. Como esta ecuación tiene las raíces 4, $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$, interesaba la relación con las propuestas por la fórmula de Cardan.

Fue el ingeniero hidráulico Rafael Bombelli (Italia, 1526 - 1572), unos treinta años después de la publicación de la obra de Cardan, quien introdujo un razonamiento que el mismo catalogó de un tanto “salvaje”.

Planteó que como $-2+\sqrt{-121}$ y $-2-\sqrt{-121}$sólo se diferencian en un signo, lo mismo debía suceder con sus raíces cúbicas.

Así escribía $\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$ y $\sqrt[3]{-2-\sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$

donde por cálculo directo obtenía que a = 2 y b = 1, luego

$$\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{-121}} = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right) = 4$$

Así Bombelli “daba sentido” a las expresiones de Cardan.

Este razonamiento se convierte por tanto como el nacimiento de la variable compleja. Bombelli desarrolló un cálculo de operaciones con números complejos que se ajusta a los que conocemos en la actualidad.

Comentar en este punto que comúnmente se dice que fué la ecuación cuadrática la que forzó la definición de los números complejos. Con lo expuesto anteriormente debemos asignar a la ecuación de orden tres tal papel.

## Consolidación del área:

A principios de 1620, Albert Girard sugiere que las ecuaciones de grado n tienen n raíces. Esta premonición del teorema fundamental del ´algebra estaba en este caso planteada de forma vaga y sin rigor.

René Descartes (Francia, 1596-1650), que bautizó con el nombre de imaginarios a los nuevos números, apuntó también que toda ecuación debía tener tantas raíces como indica su grado, aunque números no reales podían ser alguna de ellas.

Los números complejos fueron ampliamente utilizados en el siglo XVIII. Leibniz (Alemania, 1646-1716). y Johan Bernoulli (Suiza, 1667-1748) usaron números imaginarios en la resolución de integrales.
Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+ai)(x-ai)}\,dx = -\frac{1}{2ai}\int \left(\frac{1}{x+ai} - \frac{1}{x-ai}\right)\,dx = -\frac{1}{2ai}(\log(x+ai) - \log(x-ai)).$$

Leonhard Euler (Suiza 1707-1783) con su identidad $e^{\pi i} = -1$ fue el primero en usar la notación

$$i = \sqrt{-1}$$

haciendo además un uso fundamental de los números complejos al relacionar la exponencial con las funciones trigonométricas por la expresión $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

Euler se expresaba en los siguientes términos:

"Como todos los números imaginables son mayores, menores o iguales a cero, entonces es claro que la raíz cuadrada de un número negativo no puede ser uno de estos números, [...] y esta circunstancia nos lleva al concepto de tales números, que por su naturaleza son imposibles y ordinariamente son llamados imaginarios o números falsos, porque sólo existen en la imaginación."

La representación geométrica de los complejos como puntos del plano tiene sus primeras citas en los trabajos de 1797 del noruego Caspar Wessel y en 1806 en los del suizo Jean-Robert Argand. No obstante, sería la referencia de Gauss de 1831 la que tendría el impacto suficiente.

En 1833, William Rowan Hamilton (Inglaterra 1805-1865) da la primera definición algebraica rigurosa de los complejos como pares de números reales.

El 1847 es Agoustin-Louis Cauchy (Francia, 1789-1857) quien da una definición abstracta de los números complejos como clases de congruencias de polinomios reales, basándose en las clases de congruencias de enteros dada por Gauss.

Ya comenzada la segunda mitad del siglo XIX, las dudas y misterios sobre los números complejos ya han desaparecido, aunque haya textos del siglo XX que aún huían de utilizarlos.

La presencia de los números complejos en diversas áreas de las matemáticas y otras ciencias en este siglo son de suma utilidad.

# Complejos

## Introducción

Las sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos obedecen a la necesidad de resolver diferentes tipos de ecuaciones.

Las ecuaciones del tipo x - k = 0 con k número natural tiene solución dentro del conjunto de los números naturales (N). Por ejemplo x – 3 = 0.

Pero un simple cambio en la ecuación y pasar a x + k = 0 con k número natural, obliga la aparición del conjunto de los números enteros (Z) para poder expresar la solución. Ejemplo x + 5 = 0.

De la misma forma las ecuaciones de la forma q. x = p con p y q números enteros ($q \neq 0$), es decir que x = p / q, impone la aparición de los números racionales (Q).

La existencia de ecuaciones tales como la que expresa la longitud de la hipotenusa "$\sqrt{2}$" de un triángulo rectángulo isósceles (o sea de catetos iguales) cada uno de ellos de longitud unitaria, o la relación que se establece entre la longitud de una circunferencia y el diámetro de la misma, hace que las soluciones de las mismas no se puedan expresar en forma de números racionales y de esta manera surgen los irracionales I.

De la unión del conjunto de los números racionales y los números irracionales surge el conjunto de los números reales (R), con los cuales podemos resolver la casi totalidad de los problemas que se presentan.

Sin embargo una ecuación de la forma $x^2 - k = 0$, con k número positivo , no tiene solución en el campo de los reales. No existe $x \in R$ tal que $x^2 = k$ , con $k < 0$. De tal forma aparece la necesidad de la utilización de un conjunto numérico, el cual permite expresar solución a las ecuaciones del tipo señaladas en el párrafo anterior, el conjunto de los **números complejos (C).**

En particular buscamos solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$, o lo que es lo mismo $x^2 = -1$

Por lo tanto $\sqrt{-1}$ es un número complejo, es llamado la unidad imaginaria y se le asigna la letra "i". Dependiendo de la bibliografía o la rama de la ciencia que utilice a los complejos también se le asigna la letra "j"; por ejemplo en teoría de circuitos donde $\sqrt{-1} = j$ debido a que la corriente se simboliza con la i y caso contrario puede introducir confusiones.

Luego i cumple que $i^2 = -1$. (Luego se plateara).

Entonces si retomamos la búsqueda de la ecuación $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Retomemos el sistema de ecuaciones planteado anteriormente.

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

que daba como soluciones $x_{1,2} = 5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$

Consideremos la parte de la raíz $\sqrt{-15} = \sqrt{(-1).15} = \sqrt{-1}.\sqrt{15} = i\sqrt{15}$

Quedando las soluciones al sistema → $x_{1,2} = 5 + i\sqrt{15}$ y $5 - i\sqrt{15}$

## DEFINICIÓN

Los números complejos z los podemos definir mediante dos números reales: “a” y “b” expresados en forma de par ordenado o en forma binómica de la siguiente forma

| | | |
|---|---|---|
| Forma Binómica | → | z = a + bi |
| Par ordenado o cartesiana | → | z = ( a , b ) |

**Donde: a, b ϵ R**

En la forma binómica el complejo z = a + bi se expresa mediante la suma de dos números reales a y b, siendo “a” la **parte real del complejo Re(z)** y “b” la **parte imaginaria del complejo Im(z)** que es el número que multiplica a la unidad imaginaria “i”

| |
|---|
| a = Re(z) = Parte real del complejo z |
| b = Im(z) = Parte imaginaria del complejo z |

IMPORTANTE: cuando hablamos de la parte imaginaria “b” nos referimos al número que multiplica a la “i”, unidad imaginaria, sin la “i”.

En la forma z = ( a , b ) el complejo se expresa como par ordenado, siendo la primera componente el valor correspondiente a la parte real del complejo Re(z) y la segunda componente del par ordenado pertenece a la componente imaginaria del complejo Im(z)

Por lo tanto, el complejo z = 2 + $\sqrt{-3}$ lo podemos escribir como

z = 2 + $\sqrt{3}$ i = ( 2 , $\sqrt{3}$); con Re(z) = 2 y Im(z) = $\sqrt{3}$

El conjunto de los números reales está incluido dentro del conjunto de los números complejos. Por lo tanto, el número real 5 en el conjunto de los complejos se expresa como el z = 5 + 0i = ( 5 , 0) = 5

Los complejos cuya Im(z) = 0 se denominan complejos reales puros → ej: z = 2; z = -8; z = 101.

Los complejos cuya Re(z) = 0 se denominan complejos imaginarios puros → ej: z = i; z = 4i; z = -9i

## Operaciones

### Igualdad

Dado dos complejos $z_1 = ( a , b ) = a + bi$ y $z_2 = ( c , d) = c + di$; diremos que $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ y $b = d$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \text{ y } \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$

### Suma

Dado $z_1 = ( a , b ) = a + bi$ y $z_2 = ( c , d) = c + di$, dos números complejos, la suma da otro complejo

$$z1 + z2 = ( a+c , b+d ) = (a+c) + (b+d)i$$

### Resta o diferencia

Dado $z_1 = ( a , b ) = a + bi$ y $z_2 = ( c , d) = c + di$, dos números complejos, la resta da otro complejo; también es posible interpretar la resta como sumar el inverso aditivo del segundo complejo.

$$z1 - z2 = ( a-c , b-d ) = (a-c) + (b-d)i$$

### Producto

Dado $z_1 = ( a , b ) = a + bi$ y $z_2 = ( c , d) = c + di$, dos números complejos, el producto da otro complejo

$$z_1 . z_2 = ( a.c - b.d , a.d + b.c ) = (a.c - b.d) + (a.d + b.c)i$$

Para obtener el producto multiplicando la forma binomica debemos tener en cuenta que $i^2= -1$ (se verá más adelante)

$z_1 . z_2 = (a + bi) (c + di) = a.c + a.di + c.bi + bi.di = a.c + a.di + c.bi + b.di^2 = a.c + a.di + c.bi - b.d$

Agrupamos partes reales y partes imaginarias

$z_1 . z_2 = a.c - b.d + a.di + c.bi$ Sacamos i como factor común $z_1 . z_2 = (a.c - b.d) + (a.d + b.c)i$

### Producto de un complejo por un número real.

Sea $z = ( a , b ) = a + bi$ un número complejo y sea $k \in R$ un número real cualquiera. Definimos que el producto de $k.z = ( k.a , k.b) = k.a + k.bi$, lo que da nuevamente un número complejo

## El cuerpo de los números complejos

Dados $z_1$, $z_2$, $z_3$ pertenecen al conjunto de los números complejos, satisfacen las siguientes propiedades para la suma y el producto:

1. Ley de cierre o clausura para la suma y el producto → $z_1$, $z_2$ pertenecen a C entonces $z_1 + z_2$ y $z_1 . z_2$ pertenecen a C

2. Ley asociativa de la suma → $z_1 + ( z_2 + z_3 ) = (z_1 + z_2) + z_3$

3. Existencia de elemento neutro de la suma (0) → $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$

4. Para cualquier número complejo "z", existe un número único "z*" en C tal que $z + z^* = 0$; $z^* + z = 0$ $z^*$ se llama el opuesto de z con respecto a la suma y se denota por $-z = (-a , -b )$.

5. Les conmutativa de la suma → $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

6. Ley asociativa del producto → $z_1.(z_2. z_3) = (z_1.z_2) .z_3$

7 Existencia de elemento neutro del producto (1) → $1.z_1 = z_1$

8. Para cualquier $z_1 \neq 0$ , existe un número único $z \in C$ tal que $z_1.z = z.z_1 = 1$ ; z se llama inverso de $z_1$ con respecto al producto y es denotado por $z^{-1}$ o $\frac{1}{z}$ .

9. Ley conmutativa del producto → $z_1. z_2 = z_2.z_1$

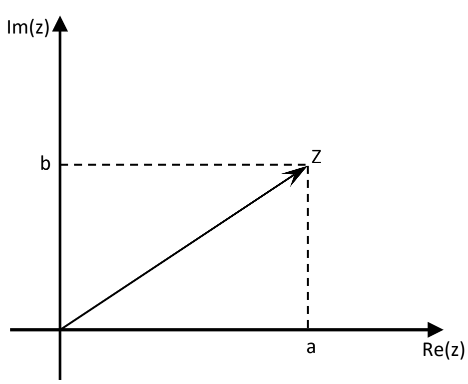
10. Ley distributiva → $z_1.( z_2 + z_3 ) = z_1.z_2 + z_1. z_3$

En general, cualquier conjunto cuyos elementos satisfagan las propiedades anteriores, se dice que es un cuerpo

"Los números complejos forman un cuerpo, el cuerpo complejo, denotado por C (o más apropiadamente por el carácter unicode ℂ ). Si identificamos el número real a con el complejo real puro (a, 0), el cuerpo de los números reales R aparece como un subconjunto (subcuerpo) de C. Más aún, C forma un espacio vectorial de dimensión 2 sobre los reales. Los complejos no pueden ser ordenados como, por ejemplo, los números reales, por lo que C no puede ser convertido de ninguna manera en un cuerpo ordenado."

## Representación gráfica de los números complejos

A los números complejos se los puede representar gráficamente en el así llamado diagrama de Gauss o de Argand , que es básicamente un par de ejes coordenados en el cual el eje de las abscisas se corresponde con el conjunto de los números reales y se lo denomina **eje real** , mientras que el que corresponde a las ordenadas, si bien los valores que toma son reales, se lo denomina **eje imaginario.**



## Trabajemos con algunos ejemplos para clarificar lo visto

Ejercicio:

Dados los siguientes complejos indicar Re(z) y Im(z).

$z_1 = (-2, 3)$ → Re(z)= …… y Im(z)=……..

$z_2=3$ → Re(z)= …… y Im(z)=……..

$z_3= 1- i$ → Re(z)= …… y Im(z)=……..

$z_4= 5$ → Re(z)= …… y Im(z)=……..

### Con la suma:

Sean $z_1 = (2, 0) = 2$ y $z_2= (3, 0) = 3$ → $z_1 + z_2= (2+3, 0) = (5, 0) = 5$, con lo que la suma de dos números reales puros da como resultado (obviamente) otro número real puro.

Sean $z_1 = (0, 1) = 1i = i$ y $z_2= (0, 2) = 2i$ → $z_1 + z_2= (0, 1+2) = (0, 3) = 3i$, con lo que la suma de dos números imaginarios puros da como resultado otro número imaginario puro.

Sean $z_1 = (2, 3) = 2$ y $z_2= (-4, 1)$ → $z_1 + z_2= (2+(-4), 3+1) = (-2, 4) = -2 + 4i$

Ejercicio:

Dado $z_1 = (-2, 3)$, $z_2=3i$, $z_3= 1- i$ y $z_4= 5$. Hallar:

$z_1 + z_2=$

$z_1 + ( -z_4)=$

$z_2 + z_4 - z_1=$

### Con el producto por un escalar (R):

Dado $z_1 = (-1, -2)$, $z_2= - 2i$, $z_3= 1- i$ y $z_4= 60$. Hallar:

$3 \cdot z_2=$

$-2 \cdot z_3=$

$-2 \cdot z_2+ \frac{1}{2} z_4=$

### Con el producto por un escalar (R):

Sean $z_1 = (2, 0)$, $z_2= (3, 0)$ → $z_1 \cdot z_2 = (2.3 - 0.0 , 2.0 + 0.3) = (6 , 0)$. Por lo que el producto de dos números reales puros da por resultado otro número real puro.

Sean $z_1 = (0, 1)$, $z_2= (0, 1)$ → $z_1 \cdot z_2$ , o sea la unidad imaginaria "i" multiplicada por sí misma, luego $z_1 \cdot z_2 = (0. 0 - 1. 1, 0. 1+1. 0) = ( -1, 0)$, obtenemos que elevando al cuadrado la unidad imaginaria el resultado es el número real -1 → $i^2= -1$

El anterior es evidentemente un caso particular, si se multiplica un número imaginario puro por otro número imaginario puro, el resultado es un número real puro, veamos; $z_1 = (0, b)$ y $z_2 = (0, d)$ , el resultado de $z_1 . z_2 = (0. 0 - b. d, 0. d + b. 0) = (-b.d , 0)$

### Complejo conjugado $\bar{z}$

Dado un número complejo $z = (a , b) = a + bi$ , podemos definir a su conjugado

$$\bar{z} = (a, -b) = a - bi$$

Como vemos el conjugado mantiene la misma parte real y la parte imaginaria cambia de signo.

Ejemplos:

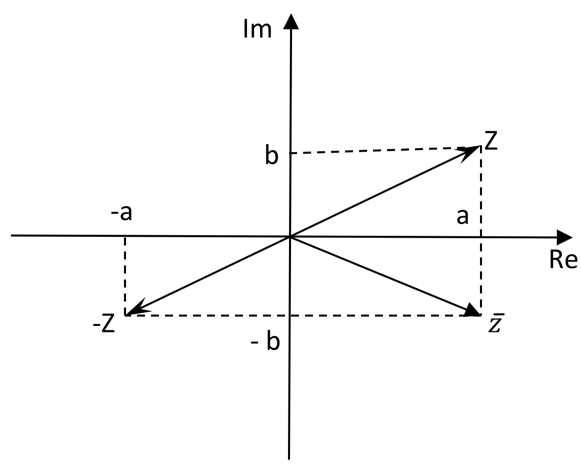
Si $z = (2, 3) = 2 + 3i$ → su conjugado será $\bar{z} = (2, -3) = 2 - 3i$

Si $z = (4, -1) = 4 - i$ → su conjugado será $\bar{z} = (4, 1) = 4 + i$

Si $z = (3, 0) = 3$ → su conjugado será $\bar{z} = (3, 0) = 3$

Si $z = (0, -2) = -2i$ → su conjugado será $\bar{z} = (0, 2) = 2i$

Grafiquemos ahora en el mismo diagrama a z, -z y $\bar{z}$




Geométricamente el opuesto es el simétrico con respecto a una simetría central de centro (0;0) y el conjugado es el simétrico de z con respecto a una simetría axial de eje el eje de abscisas

### Propiedades del conjugado de un complejo

Dado el complejo $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$

1) La suma de un número complejo con su conjugado da por resultado el doble de la componente real

$$z + \bar{z} = 2.a$$

2) La diferencia entre un número complejo y su conjugado da por resultado el doble de la parte imaginaria (tener en cuenta el orden en el que se efectúa la diferencia)

$$z - \bar{z} = 2.bi$$

3) El producto de un número complejo con su conjugado da por resultado un número real positivo (o nulo en el caso que el complejo sea (0,0)).

$$z . \bar{z} = a^2+b^2$$

Como tanto la componente real como la imaginaria están elevadas al cuadrado el resultado es un número real positivo y solamente se anula si a = b = 0.

4) El conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número complejo.

$$\bar{\bar{z}} = z$$

5) El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

6) El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados.

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

7) El conjugado del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los conjugados (siempre que el divisor sea distinto del (0,0)).

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

## División de complejos mediante el conjugado.

Para realizar el cociente de dos números complejos, podemos multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador. Como hemos visto el producto de un número complejo por su conjugado da por resultado un número real positivo, que es quien será el nuevo denominador (real) ; mientras que en numerador se debe realizar el producto del dividendo por el conjugado del divisor.

Dado $z_1$ y $z_2 \neq (0,0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

## Potencia de la unidad imaginaria.

Supongamos que deseamos calcular las potencias enésimas de la unidad imaginaria

$i^n$ con n = 0, 1, 2, 3, . . . . .

Por definición $i^0 = 1$

También por definición $i^1 = i$

Sabemos que $i^2 = -1$.

Luego $i^3 = i^2 . i = -1 . i = -i$

Si calculamos $i^4 = i^2 . i^2 = -1.(-1) = 1$. Por lo tanto se vuelve a repetir el valor de $i^0$ y a partir de allí se repiten todas las potencias sucesivas.

Por ejemplo, ¿cuál será el valor de $i^{147}$?

Podemos dividir 147 por 4 y el resultado será $147 = 4 . 36 + 3 = 144 + 3$

Entonces $i^{147} = i^{4.36+3} = i^{4.36} . i^3 = (i^4)^{36} . i^3 = (1)^{36} . i^3 = 1 . i^3 = 1.(-i) = -i$

Al dividir la potencia por 4, sabemos que nos quedará una potencia cuarta de i que es igual a 1 y por lo tanto el resultado será i elevado al resto de la división de la potencia por 4. (que es siempre menor que 4)

Otra manera de trabajar con los complejos que facilita ciertas operaciones es la forma polar o trigonométrica y también la forma exponencial, todas ellas se definen a partir del módulo y ángulo o argumento de un complejo.

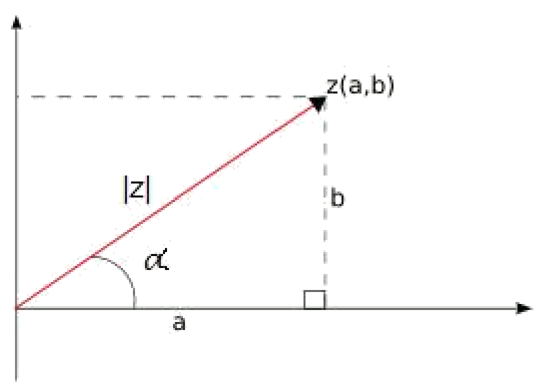
## Módulo ($|z|$) y argumento de un complejo (Arg(z))

Al trabajar de forma binómica, como se vio anteriormente, lo que hacemos es, a través de sus componentes real e imaginaria representar un vector en el plano.

Pero los vectores en el plano pueden ser entendidos también como una longitud y un ángulo. Por eso, los números complejos también se pueden determinar con una longitud (que será el módulo) y un ángulo. Veamos cómo se construye.

Para representar un número complejo z en forma polar se deben considerar el módulo y el argumento de éste. El módulo se refiere a la longitud del vector que lo representa en el plano, y el argumento se refiere al ángulo que forma con el eje horizontal (eje real positivo) y tomado en forma anti-horaria

Es decir, gráficamente es:



A **|z|** se le llama módulo y es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la componente real y la componente imaginaria.

$$|z| = |(a+bi)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

A **α** se le llama el argumento del número complejo z y es el ángulo que forma el número complejo z con el eje real (semi-eje positivo); en sentido anti-horario el ángulo se toma con valor positivo y en sentido horario el ángulo se toma con valor negativo.

$$tg\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{entonces} \qquad \alpha = arc\ tg\frac{b}{a}$$

IMPORTANTE 1: Tanto en la fórmula de módulo como en la del ángulo no se coloca la "i" , solo el número real que es la parte imaginaria

IMPORTANTE 2: Cuando los complejos están sobre los ejes (Reales puros e imaginarios puros) los ángulos se obtienen gráficamente.

IMPORTANTE 3: Tener en cuenta que al realizar las cuentas con la calculadora el arco tangente nos arroja valores de ángulos que están en el I y IV cuadrante únicamente. Se debe siempre verificar a qué cuadrante pertenece el complejo y en el caso que el valor arrojado por la calculadora no corresponda con el cuadrante deberemos sumarle media vuelta = 180º = π al resultado para obtener el verdadero ángulo.

Ejemplos:

Hallar el módulo y el argumento de:

El módulo es una distancia por lo que nunca puede dar un numero <0

$$Z_1 = 3+4i$$

Para hallar el módulo: $|Z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

Para hallar el argumento:

$$tg\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = arctg\frac{4}{3} = 53°1'$$

Ejercicios:

Hallar el modulo y el argumento de los siguientes complejos y verificar gráficamente la solución obtenida.

1) $z_1 = 3 + 2i$
2) $z_2 = 3 - 2i$

3) $z_3$= - 3 + 2i
4) $z_4$= - 3 - 2i
5) $z_5$= - 3
6) $z_6$= 2i

Argumento principal es el ángulo comprendido en el primer giro

Argumento principal $0 \leq \alpha < 2\pi$

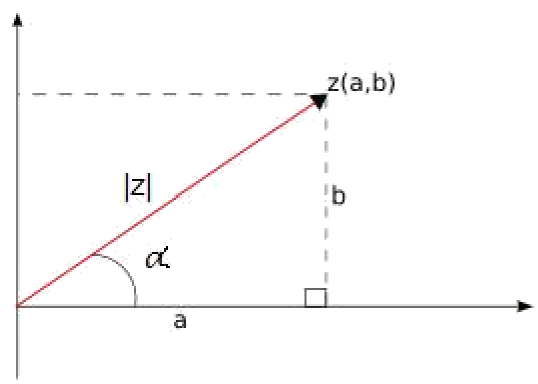
Si el ángulo al calcularlo da negativo le debemos sumar un número entero de vueltas, en cambio si el valor del ángulo es positivo y mayor a $\boldsymbol{2\pi}$ lo que debemos hacer es restar números enteros de vueltas.

Ejemplo; Si el ángulo es -45° debemos sumarle 360° de esa forma obtenemos el argumento principal. Estaríamos hablando del ángulo 315° y este se encuentra en el cuarto cuadrante.

## Forma Polar o Trigonométrica

En la forma polar o trigonométrica de un complejo se lo identifica al mismo a través de su ángulo y de su módulo.

$\rho$




Dado el complejo z = a + bi

Vamos a relacionar tanto a (cateto adyacente) como b (cateto opuesto) en forma trigonométrica con el ángulo α y la hipotenusa $\rho = |z|$

$a = \rho.\cos\alpha$

$b = \rho.\operatorname{sen}\alpha$

Reemplazamos el a y b en la ecuación binómica del complejo

$z = \rho.\cos\alpha + i\rho.\sin\alpha = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

**Forma polar o trigonométrica**

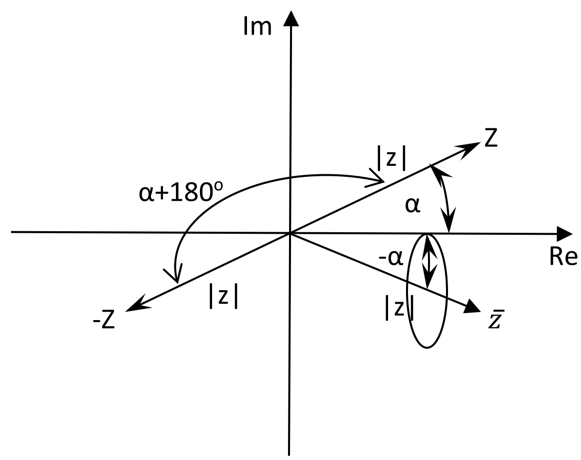
$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

De esta manera vemos como desde la forma de par ordenado o desde la binómica podemos obtener la expresión trigonométrica del mismo obteniendo su modulo y ángulo.

También podemos convertirr desde la forma trigonométrica a la forma binómica
$z = \rho.\cos\alpha + i\rho.\sin\alpha = a + bi$

### Opuesto y conjugado en forma Polar o Trigonométrica

Volvamos al grafico de z, -z y $\bar{z}$




Podemos observar que tanto z, -z como $\bar{z}$ tiene todos la misma distancia al origen; mismo módulo. Lo que difieren es en los ángulos, pero estos están relacionados.

Si $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ entonces

El conjugado es $\bar{z} = \rho(\cos -\alpha + i\sin -\alpha)$

Y el opuesto es $-z = \rho(\cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi))$

### Igualdad de números complejos en forma Polar o Trigonométrica

Dados dos números complejos expresados en forma polar, $z_1 = \rho_1 (\cos\alpha_1 + i \text{ sen } \alpha_1)$ y

$z_2 = \rho_2 (\cos\alpha_2 + i \text{ sen } \alpha_2)$

Serán iguales si:

$\rho_1 = \rho_2$ (sus módulos son iguales) y

Los ángulos $\alpha_1$ y $\alpha_2$ concuerdan

Pero esta última condición implica que o bien son iguales o que entre $\alpha_1$ y $\alpha_2$ debe haber un número entero de vueltas de 360º . Son coterminales

Por ejemplo si $\alpha_1 = 70º \rightarrow \alpha_2$ concuerda con $\alpha_1$ si $\alpha_2 = 70º$ o toma los siguientes valores -290º, 430º, 790º, 1150º,…….., $\alpha_1 = 70º \pm 2.k.\pi$ con k entero.

En estos casos se dice que $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son congruentes.

Si expresamos el giro de 360º en radianes se convierte en $2\pi$. Por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2 \pm 2.k.\pi$ con k entero.

Lo que se señala de esta forma es que para que dos números complejos expresados en forma polar representen a un único número complejo , los módulos tienen que ser iguales (o sea la distancia al origen de coordenadas debe ser la misma) y tienen que estar ubicados de tal forma que los ángulos que forman con el eje real (sus argumentos) , sean congruentes , o sea solo puedan diferir en un número entero de giros completos alrededor del origen.

## Producto de números complejos en forma Polar

Dados dos números complejos expresados en forma polar

$z_1 = \rho_1 (\cos \alpha_1 + i \text{ sen } \alpha_1)$

$z_2 = \rho_2 (\cos \alpha_2 + i \text{ sen } \alpha_2)$

Efectuando su producto distribuyendo adecuadamente y aplicando la fórmula de trigonometría del coseno y del seno de la suma de ángulos obtenemos que:

$$z_1 . z_2 = \rho_1 . \rho_2 (\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \text{ sen } (\alpha_1 + \alpha_2))$$

Si se multiplica n veces un mismo número complejo se obtiene la llamada Formula de De Moivre

$Z^2 = z . z = \rho . \rho (\cos (2\alpha) + i \text{ sen } (2\alpha))$

$Z^3 = z . z^2 = \rho . \rho . \rho (\cos (3\alpha) + i \text{ sen } (3\alpha))$

## Potencia de números complejos en forma Polar

$$Z^n = \rho^n [\cos(n\alpha) + isen(n\alpha)]$$

Ejemplo:

Hallar $(1 + i)^3$

En primer lugar se debe escribir el complejo (1 + i) a la forma polar, para ello se calcula el módulo de la manera anteriormente explicada:

$$|Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

En segundo lugar hallo el argumento:

$$tg\alpha = \frac{1}{1}$$

$$\alpha = arctg1$$

$$\alpha = 45^o$$

Por proporcionalidad decimos que: $\frac{180°}{\pi} = \frac{45°}{x} \quad x = \frac{45°\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}$

Entonces pordemos decir que:

$$(1+i)^3 = (\sqrt{2})^3\left[\cos\frac{3}{4}\pi + isen\frac{3}{4}\pi\right]$$

### Cociente de números complejos en forma Polar

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. (cos ($\alpha_1$ - $\alpha_2$) + i sen ($\alpha_1$ - $\alpha_2$)) Con $z_2$ diferente de 0

### Conjugado de un complejo en forma Polar

Si z= ρ (cos α + i sen α), entonces $\bar{z}$ = ρ (cos α - i sen α). Aplicando las fórmulas $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ y $\sin(\alpha) = -\sin -\alpha$, resulta

$\bar{z}$ = ρ (cos (- α) + i sen (- α))

### Radicación de un complejo en forma Polar

Dado un complejo z= ρ (cos α + i sen α) expresado en forma trigonométrica para calcular la raíz enésima de z → $\sqrt[n]{z}$ utilizamos:

$$\sqrt[n]{\rho.(\cos\alpha + isen\alpha)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + isen\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)_{k=0,1,2,\ \ldots..,\ (n-1)}$$

Siendo ρ y α datos.

Como observamos la raíz enésima de un complejo va a tener tantas raíces como sea el valor de n. con k tomando valores desde 0 hasta n-1.

Ejemplo:

$z^2 = 10 + 0i$ → $z = \sqrt[2]{(10+0i)}$

En primer lugar vamos a hallar el módulo y el ángulo (como lo veníamos haciendo)

Para hallar el módulo: $|Z| = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$

Y para hallar el ángulo: $\alpha = tg\frac{0}{10} = 0^{O}$ o directamente al encontrarse sobre el eje x positivo el argumento es 0

(10 + 0i) = 10.(cos0º+i.sen0º)

Como la raíz es cuadrada vamos a utilizar dos valores para la constante, los cuales son el 0 y el 1, entonces ya tenemos todos los datos para aplicar a esta fórmula.

$$|w|^2\left(\cos(2\rho) + isen(2\rho)\right) = 10(\cos(0) + isen(0))$$

$|w|^2 = 10$ entonces $|w| = \sqrt{10}$ y $2\rho = 0 + 2\,k\,\pi$ con k = 0,1

$$\rho = \frac{0 + 2\,k\,\pi}{2}$$

Para k=0 $\rho = \frac{0+2.0.\pi}{2} = 0$

$z_o = \sqrt{10}\left(\cos 0 + isen0\right) = \sqrt{10}\left(1 + 0i\right) = \sqrt{10}$

Para k=1 $\rho = \frac{0+2.1.\pi}{2} = \frac{2\,\pi}{2} = \pi$

$z_1 = \sqrt{10}\left(\cos\pi + isen\pi\right) = \sqrt{10}\left(-1 + 0i\right) = -\sqrt{10}$

Como vemos, es el mismo resultado que obtenemos en los reales para la ecuación $x^2$=10 , $x = \sqrt{10}$ $o\ x = -\sqrt{10}$

Analicemos ahora el siguiente caso:

$z^3 = -8$

Si tuviéramos esta ecuación en los reales la única solución para $x^3$= -8 es x = -2 pero analicemos que pasa en el campo complejo.

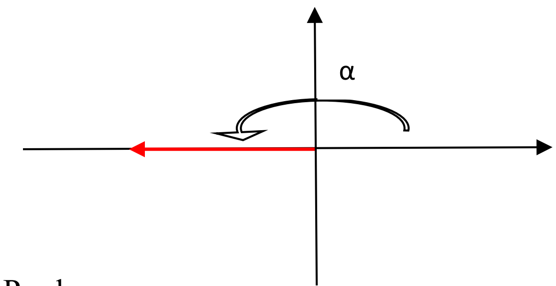
$z^3 = -8 + 0i \rightarrow z = \sqrt[3]{(-8 + 0i)}$

Hallamos el modulo y el ángulo.

Para hallar el módulo: $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$

Y para hallar el ángulo: $\alpha = tg\frac{-8}{0} = no\exists$

Recordemos que al comienzo mencionamos que los complejos que están sobre los ejes (como es este caso) no se pueden hallar los ángulos con la formula, sino que hay que hacerlo gráficamente.




Por lo que α = π.

➔ (-8 + 0i) = 8.(cosπ+i.senπ)

Como en este caso la raíz es cubica entonces n=3

$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2.k.\pi}{3} + isen\frac{\pi + 2.k.\pi}{3}\right)$; con K= 0,1,2

Para k=0

$$z_o = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2.0.\pi}{3} + isen\frac{\pi + 2.0.\pi}{3}\right)$$
$$z_o = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$$

Para k=1

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2.1.\pi}{3} + isen\frac{\pi + 2.1.\pi}{3}\right)$$
$$z_1 = \sqrt[3]{8}(\cos\pi + isen\pi) = \sqrt[3]{8}(-1 + 0i)$$
$$z_1 = -2$$

Para k=2

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2.2.\pi}{3} + isen\frac{\pi + 2.2.\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3}\right)$$

Estas son las tres soluciones a la raíz cubica de -8. Como observamos el resultado que obteníamos en los reales (-2) sigue estando pero se suman dos valores complejos mas.

Veamos que pasa si le seguimos dando valores a k

Para k=3

$$z_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2.3.\pi}{3} + isen\frac{\pi + 2.3.\pi}{3}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{3} + isen\frac{7\pi}{3}\right)$$

Como es un ángulo que no está en primer giro ya que supera 2π, le restamos una vuelta con lo que termina quedando:

$z_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$ Que es el mismo valor obtenido para $z_0$

## Forma exponencial de un complejo

Esta forma de expresar a un número complejo se basa en una fórmula debida a Euler y cuya demostración pertenece al ámbito del Análisis Matemático. Por lo tanto aquí la utilizaremos directamente.

**Fórmula de Euler:**

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + isen\alpha$ donde $e$ es el número base de los logaritmos naturales y $e$= 2,718281... (A este número tan importante en todas las ramas de la Matemática se lo llama constante de Nepper en homenaje al matemático que introdujo el concepto de logaritmo).

Luego, utilizando esta fórmula un número complejo z = ρ (cos α + i sen α) se escribe simplemente como

$$z = \rho e^{i\propto}$$

y se utilizan las propiedades de las potencias de igual base para operar con los números complejos.

A saber:

### Multiplicación de complejos en forma exponencial

$$z_1.z_2 = \rho_1 e^{i\alpha_1}.\rho_2 e^{i\alpha_2} = \rho_1.\rho_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$$

### Cociente de complejos en forma exponencial

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}$$

### Potenciación de complejos en forma exponencial

$$z^n = \rho^n e^{in\alpha}$$

Haremos un simple ejemplo:

Sea el número complejo $Z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{1}{4}\pi + isen\frac{1}{4}\pi\right]$ Que expresado en forma exponencial, resulta :

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}$$

Como vemos tenemos la misma información que en la forma polar o trigonométrica pero su escritura es más abreviada.

De las formas de expresar un complejo que vimos:

$$\begin{cases} \text{Binómica} \\ \text{Par ordenado} \\ \text{Polar o Trigonométrica} \\ \text{Exponencial} \end{cases}$$

Vemos que la suma y resta de complejo las debemos hacer en las primeras dos formas y que si queremos multiplicar, dividir, obtener potencias o raíces las formas más apropiadas son las dos últimas.

Ejercicios:

Dados los siguientes complejos:

$z_1 = (1,1)$
$z_2 = 3 - 2i$
$z_3 = -i$
$z_4 = 2\ (\cos\frac{\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{\pi}{2})$
$z_5 = 4\ (\cos\frac{3\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{2})$
$z_6 = 2e^{i\pi}$
$z_7 = e^{i(\pi/4)}$

Hallar:

a) $z_1 . z_4$

b) $z_1 + z_4$

c) $(z_3 . z_5) - z_6$

d) $\frac{z_2}{z_1}$

e) $\overline{z_4} . z_3$

f) $(z_3)^3$

g) $(z_6)^{12} . z_5$

h) $z^5 = z_2$

i) $z^3 = z_7$

j) $z = \frac{1}{\frac{1}{z_4} + z_6 + z_2}$

Bibliografía:

I. Kleiner, ”Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral)”, The Mathematics Teacher, 81:7 (1988), 583-592.

D. E. Smith, History of Mathematics (Vol I-II). Dover. 1958. New York.

Eugenio Hernández, Algebra y Geometría (Segunda edición), Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid (1994)

Ruel V. Churchill / James Ward Brown, Variable Compleja y Aplicaciones, Mc Graw Hill (1992)